Ex3 : Quelles sont les variables aléatoires de variance nulle ?
Cours : ce sont les variables constantes. (indication pour la preuve : utilisez la définition de la variance)

Ex 4 : On lance deux dés à 6 faces, on note leur somme.
On attribue un gain suivant la valeur obtenue avec la formule suivante
Gain= 2 fois la somme -10.
a) Quelle est la loi de probabilité du gain ?
b) Quel est le gain moyen ?
c) Proposer un autre gain donnant un jeu équilibré.

a) On se rappelle bien de l'exercice de probabilités… on a déjà les résultats sur la somme des deux dés :

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

| Somme | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Proba | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

D'où le tableau suivant pour la variable gain :

| Gain x= Somme fois 2 -10 | -6 | -4 | -2 | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Proba | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

b) On peut alors calculer l'espérance du gain :

$$E(G) = \frac{-6-8-6+0+10+24+30+32+30+24+14}{36} = \frac{144}{36} = 4$$

c) Pour obtenir un jeu équilibré il faut que l'espérance soit nulle.

C'est le cas si :

par exemple, en associant 0 à la somme 7

100 à la somme 2 et -100 à la somme 12 $(100 \times \frac{1}{36} - 100 \times \frac{1}{36} = 0)$

25 à la somme 3 et -25 à la somme 11 $(25 \times \frac{2}{36} - 25 \times \frac{2}{36} = 0)$

250 à la somme 4 et -250 à la somme 10

254321 à la somme 5 et -254321 à la somme 9

65725 à la somme 6 et -65725 à la somme 8

… à compléter

en utilisant la symétrie de la loi de la somme.

Méthode plus simple : Soit S la variable de la somme des deux dés,

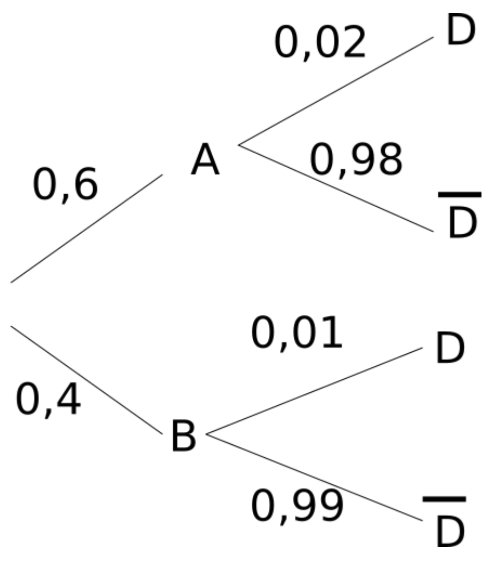
En posant G2 = S - E(S) on a E(G2)= E(S-E(S))=E(S)-E(E(S))=E(S)-E(S)=0

Exercice 7: Une entreprise fabrique des cartes graphiques pour ordinateurs.
Deux ateliers de fabrication se répartissent la production de la journée.
L'atelier A est plus moderne et produit 60% des cartes et l'atelier B en produit 40%.
Un contrôle de qualité a permis de constater que 2% des cartes de l'atelier A et 1% des cartes de l'atelier B présentent un défaut.
Chaque carte a un coût de production de 10 euros dans l'atelier A et de 15 euros dans l'atelier B.
Les cartes défectueuses sont détruites après contrôle et le coût de recyclage de chaque carte est de 5 euros.
Les autres cartes (celles qui ne sont pas défectueuses) sont vendues 50 euros.

Déterminer le bénéfice que peut espérer en moyenne l'entreprise sur chaque carte fabriquée.

On note A : « la carte est fabriquée dans l'atelier A »
B : « la carte est fabriquée dans l'atelier B »
D : « la carte est défectueuse »
X : le bénéfice

On peut faire l'arbre de probabilité suivant :



D'où $P(X = -15) = P(A \cap D) = 0{,}6 \times 0{,}02 = 0{,}012$

$$P(B \cap D) = P(X = -20) = 0{,}4 \times 0{,}01 = 0{,}004$$

$$P(B \cap \overline{D}) = P(X = 50 - 15 = 35) = 0{,}4 \times 0{,}99 = 0{,}396$$

$$P(A \cap \overline{D}) = P(X = 40) = 0{,}6 \times 0{,}98 = 0{,}588$$

On en déduit le tableau de la loi du bénéfice :

| x | -20 | -15 | 35 | 40 |
|---|---|---|---|---|
| P(X=x) | 0,004 | 0,012 | 0,396 | 0,588 |

On en déduit que l'espérance vaut

$$E(X) = -20 \times 0{,}004 - 15 \times 0{,}012 + 35 \times 0{,}396 + 40 \times 0{,}588$$

$$E(X) = 37{,}12$$

Le bénéfice moyen est donc de 37,12 euros.