Variables aléatoires discrètes

Exemple : Une urne contient 1 boule blanche, 3 boules rouges et 6 boules noires.
On gagne 100 quand on tire une boule blanche
20 quand on tire une boule rouge et
0 quand on tire une boule noire.
Le gain est une variable aléatoire.

Définition : Soit Ω un ensemble d'évènements élémentaires sur lequel on a défini une probabilité. Faisons correspondre un nombre à chaque évènement élémentaire.
On définit ainsi une variable aléatoire discrète X.

Exemple :
X=Gain : {rouge, blanche, noire} $\rightarrow \mathbb{R}$
rouge $\rightarrow$ 20
blanche $\rightarrow$ 100
noire $\rightarrow$ 0

Loi de probabilité d'une variable discrète

Exemple : X, la variable aléatoire gain, peut prendre les valeurs 0, 20 et 100 avec les probabilités suivantes :

P(X=0) = P(noire) = 0,6
P(X=20) = 0,3
P(X=100) = 0,1

Définition
L'association des valeurs x de la variable X et des probabilités P(X=x) est la loi de probabilité de X.

Exemple : loi de probabilité du Gain X

x	0	20	100
P(X=x)	0,6	0,3	0,1

Espérance mathématique :

$$E(X) = \sum_x xP(X = x)$$

Exemple : calculer le gain moyen. On l'appellera E(X) :

x	0	20	100
P(X=x)	0,6	0,3	0,1

$E(X) = 0 \times 0{,}6 + 20 \times 0{,}3 + 100 \times 0{,}1$= 16

Propriétés :

Soient a et b des constantes réelles, X et Y deux variables aléatoires :

- E(a X)=a E(X)
- E(b) = b
- E(X+Y) = E(X) + E(Y)

Exemples : (rappel E(X) = 16)

- E(2X+3) = E(2X) + E(3) = 2E(X) + 3 = 2x16 + 3 = 35
- Si Y telle que E(Y) = 8 alors E(X+Y) = E(X) +E(Y) = 16 + 8 = 24

Variance et écart type :

Définition

$V(X) = \sum_x (x - E(X))^2 P(X = x)$

L'écart type σ est la racine carrée de la variance

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Propriété (à utiliser pour les calculs !)

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ ou $E(X^2) = \sum_x x^2 P(X = x)$

Exemple : Calculer V(X) dans le cas de la variable aléatoire gain.

- On calcule d'abord le deuxième moment

$$deuxieme\ moment = E(X^2) = 0^2 \times 0{,}6 + 20^2 \times 0{,}3 + 100^2 \times 0{,}1$$
$$E(X^2) = 1120$$

- On en déduit la variance

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$
$$V(X) = 1120 - 16^2 = 1120 - 256 = 864$$

Propriétés :

- $V(a X) = a^2 V(X)$
- $V(X + b) = V(X)$
- $V(b) = 0$ la variance d'une variable constante est toujours nulle
- $V(X) \geq 0$
- $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ dans le cas où les variables X et Y sont indépendantes

(Ce n'est pas toujours le cas !)

Exemples :

- V(3X+2) = V(3X) = $3^2 V(X)$= 9V(X) = 9 x 864 = 7776
- σ(2X+3) = $\sqrt{V(2X+3)} = \sqrt{V(2X)} = \sqrt{4V(X)} = 2\sqrt{V(X)} = 2\sigma(X) = 2\sqrt{864} \approx 58{,}8$

- Si Y est telle que E(Y)=20 et σ(Y)=10 et X et Y sont indépendantes,

Calculer σ(X+Y)

$$\sigma(X+Y) = \sqrt{V(X+Y)} = \sqrt{V(X)+V(Y)} = \sqrt{V(X)+\sigma(Y)^2} = \sqrt{864+100}$$
$$= \sqrt{964}$$

Exercices sur les variables aléatoires :

Ex1 : a) Complétez les tableaux des lois de probabilité des variables suivantes :

x	-1	0	1
P(X=x)	0,2	0,5	0,3

P(X=1) = 1- (0,2 + 0,5) = 0,3

x	-1	0	1
P(Y = x)	0,25	0,5	0,25

P(Y = -1) = 1- (0,5 + 0,25)= 0,25

b) Calculez E(X) et E(Y)

$$E(X) = -1 \times 0{,}2 + 0 \times 0{,}5 + 1 \times 0{,}3 = 0{,}1$$
$$E(Y) = -1 \times 0{,}25 + 0 \times 0{,}5 + 1 \times 0{,}25 = 0$$

c) Calculez V(X) et V(Y)

$$E(X^2) = (-1)^2 \times 0{,}2 + 0^2 \times 0{,}5 + 1^2 \times 0{,}3 = 0{,}5$$

d'où $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 0{,}5 - 0{,}1^2 = 0{,}49$

$$E(Y^2) = (-1)^2 \times 0{,}25 + 0^2 \times 0{,}5 + 1^2 \times 0{,}25 = 0{,}5$$

d'où $V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 0{,}5 - 0^2 = 0{,}5$

Ex2 : Dans un magasin, on organise un jeu : chaque client lance un dé à 6 faces une seule fois et obtient alors une remise. S'il obtient 1, il obtient 10% de remise sur ses achats, s'il obtient 2,3,4 ou 5, il obtient 5% de remise, et s'il obtient 6 il obtient 20%.

a) Quelle est la loi de probabilité de la remise accordée ?
Soit X la remise accordée en %.

x	5	10	20
P(X=x)	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

b) Quelle est la remise moyenne accordée au client ?

$$E(X) = 5 \times \frac{4}{6} + 10 \times \frac{1}{6} + 20 \times \frac{1}{6} = \frac{50}{6} = \frac{25}{3} \cong 8{,}33$$

c) Proposer un jeu similaire tel que la remise pour un 6 soit de 50% mais que la remise moyenne soit de 10%

Notons r_i les remises des faces i (i= 1,2,3,4 ou 5)
On obtient alors la loi de X suivante :

x	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	50
P(X=x)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Ecrivons l'équation donnée par $E(X) = 10$

$$E(X) = 10 = r_1 \times \frac{1}{6} + r_2 \times \frac{1}{6} + r_3 \times \frac{1}{6} + r_4 \times \frac{1}{6} + r_5 \times \frac{1}{6} + 50 \times \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{6}(r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5) = 10 - \frac{50}{6}$$

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 = \left(\frac{60}{6} - \frac{50}{6}\right) \times 6$$

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 = 10$$

On peut donc proposer des jeux qui répondent à la question :

- $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r_5 = 2$
  la loi de X est alors

x	2	50
P(X=x)	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

- $r_1 = 10,\ r_2 = r_3 = r_4 = r_5 = 0$
  la loi de X est alors

x	0	10	50
P(X=x)	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

- … on peut en construire une infinité