**Test d'indépendance du Khi 2 en pratique**

**De quoi s'agit-il?**

Nous avons vu précédemment comment vérifier si deux variables sont parfaitement indépendantes à partir d'un tableau croisé.

Dans les exemples, il arrivait que les calculs donnent des résultats « quasi » indépendants,

Le test du chi 2 est une méthode permettant de savoir si on peut accepter l'hypothèse d'indépendance avec un risque (contrôlé) de se tromper.

**Exemple :** Pour comparer l'efficacité de deux médicaments agissant sur la même maladie, mais aux prix très différents, la Sécurité Sociale a effectué une enquête sur les guérisons obtenues en suivant chacun des traitements. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

| | Médicament cher | Médicament bon marché |
|---|---|---|
| Guérisons | 54 | 156 |
| Non-guérisons | 6 | 44 |

Voici la méthode du test d'indépendance du chi2 par étape :

1) Calcul des totaux :

| | Médicament cher | Médicament bon marché | total |
|---|---|---|---|
| Guérisons | 54 | 156 | 210 |
| Non-guérisons | 6 | 44 | 50 |
| total | 60 | 200 | 260 |

2) Calcul des effectifs théoriques

| | Médicament cher | Médicament bon marché | total |
|---|---|---|---|
| Guérisons | $T_{1,1} = \frac{210 \times 60}{260} \cong 48,461$ | $T_{1,2} = \frac{210 \times 200}{260} \cong 161,538$ | 210 |
| Non-guérisons | $T_{2,1} = \frac{50 \times 60}{260} \cong 11,538$ | $T_{2,2} = \frac{50 \times 200}{260} \cong 38,462$ | 50 |
| total | 60 | 200 | 260 |

3) Calcul du chi2calc :

$$\text{chi2calc}=\frac{(54-48{,}461)^2}{48{,}461}+\frac{(156-161{,}538)^2}{161{,}538}+\frac{(6-11{,}538)^2}{11{,}538}+\frac{(44-38{,}462)^2}{38{,}462}$$

$$\cong 0{,}633+0{,}190+2{,}658+0{,}798 \approx 4{,}28$$

Chi2calc≈ 4,28

4) ddl et VC

l : nombre de lignes du tableau (ne pas compter la ligne Total)

c : nombre de colonnes du tableau (ne pas compter la colonne Total)

ddl=(l-1)(c-1)

Ici ddl= (2-1)(2-1)=1x1=1

<u>Valeur critique</u>

Notée V.C., lue dans la table du chi 2,

| ddl | VC pour alpha=0,05 |
|---|---|
| 1 | 3,84 |
| 2 | 5,99 |
| 3 | 7,81 |
| 4 | 9,49 |
| 5 | 11,07 |

le risque de première espèce $\alpha$ et le nombre de d.d.l. $\nu$ étant connus.

En pratique sauf mention du contraire on pendra $\alpha$=0,05

On lit dans la table pour notre exemple V.C=3.84

## 2) Conclusion

Si chi2calc ≥ V.C **, l'hypothèse $H_0$ d'indépendance des 2 variables est rejetée au risque α**. On conclut que les deux variables ne sont pas indépendantes avec un risque de se tromper égal à **α**.

Si chi2cal< V.C **, l'hypothèse $H_0$ ne peut être rejetée. (et donc on l'accepte !)** On conclut que les variables sont indépendantes.

(en tout cas on ne peut pas conclure le contraire !)

Ici on a chi2calc≈4,28 et VC= 3,84, chi2calc>VC donc on rejete l'hypothèse d'indépendance des variables guérison et prix du médicament (au risque 5%).

Exercices: Avec un test du chideux, tester l'indépendance des variables suivantes, au risque de 5%:

1) sexe et tabac :

| | Fument | Ne fument pas |
|---|---|---|
| Femme | 55 | 25 |
| Homme | 95 | 25 |

| ddl | VC pour alpha=0,05 |
|---|---|
| 1 | 3,84 |
| 2 | 5,99 |
| 3 | 7,81 |
| 4 | 9,49 |
| 5 | 11,07 |

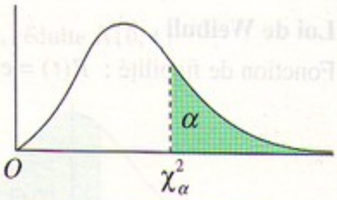
2. couleur des yeux et couleur des cheveux ddl=(2-1)(4-1)=3, VC= 7,81

| | Cheveux blonds | Cheveux bruns | Cheveux noirs | Cheveux roux |
|---|---|---|---|---|
| Yeux bleus | 872 | 380 | 90 | 22 |
| Yeux verts ou bruns | 500 | 815 | 488 | 33 |

## Table de distribution de $\chi^2$ (loi de K. Pearson)

La table donne la probabilité $\alpha$, en fonction du nombre de degrés de liberté $\nu$, pour que $\chi^2$ égale ou dépasse une valeur donnée $\chi^2_\alpha$.

$$\alpha = P(\chi^2 \geqslant \chi^2_\alpha)$$




| $\nu$ | $\alpha = 0{,}990$ | $\alpha = 0{,}975$ | $\alpha = 0{,}950$ | $\alpha = 0{,}900$ | $\alpha = 0{,}100$ | $\alpha = 0{,}050$ | $\alpha = 0{,}025$ | $\alpha = 0{,}010$ | $\alpha = 0{,}001$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,0002 | 0,0010 | 0,0039 | 0,0158 | 2,71 | 3,84 | 5,02 | 6,63 | 10,83 |
| 2 | 0,02 | 0,05 | 0,10 | 0,21 | 4,61 | 5,99 | 7,38 | 9,21 | 13,82 |
| 3 | 0,12 | 0,22 | 0,35 | 0,58 | 6,25 | 7,81 | 9,35 | 11,34 | 16,27 |
| 4 | 0,30 | 0,48 | 0,71 | 1,06 | 7,78 | 9,49 | 11,14 | 13,28 | 18,47 |
| 5 | 0,55 | 0,83 | 1,15 | 1,61 | 9,24 | 11,07 | 12,83 | 15,09 | 20,52 |
| 6 | 0,87 | 1,24 | 1,64 | 2,20 | 10,64 | 12,59 | 14,45 | 16,81 | 22,46 |
| 7 | 1,24 | 1,69 | 2,17 | 2,83 | 12,02 | 14,07 | 16,01 | 18,47 | 24,32 |
| 8 | 1,65 | 2,18 | 2,73 | 3,49 | 13,36 | 15,51 | 17,53 | 20,09 | 26,13 |
| 9 | 2,09 | 2,70 | 3,33 | 4,17 | 14,68 | 16,92 | 19,02 | 21,67 | 27,88 |
| 10 | 2,56 | 3,25 | 3,94 | 4,87 | 15,99 | 18,31 | 20,48 | 23,21 | 29,59 |
| 11 | 3,05 | 3,82 | 4,57 | 5,58 | 17,27 | 19,67 | 21,92 | 24,72 | 31,26 |
| 12 | 3,57 | 4,40 | 5,23 | 6,30 | 18,55 | 21,03 | 23,34 | 26,22 | 32,91 |
| 13 | 4,11 | 5,01 | 5,89 | 7,04 | 19,81 | 22,36 | 24,74 | 27,69 | 34,53 |
| 14 | 4,66 | 5,63 | 6,57 | 7,79 | 21,06 | 23,68 | 26,12 | 29,14 | 36,12 |
| 15 | 5,23 | 6,26 | 7,26 | 8,55 | 22,31 | 25,00 | 27,49 | 30,58 | 37,70 |
| 16 | 5,81 | 6,91 | 7,96 | 9,31 | 23,54 | 26,30 | 28,84 | 32,00 | 39,25 |
| 17 | 6,41 | 7,56 | 8,67 | 10,08 | 24,77 | 27,59 | 30,19 | 33,41 | 40,79 |
| 18 | 7,01 | 8,23 | 9,39 | 10,86 | 25,99 | 28,87 | 31,53 | 34,80 | 42,31 |
| 19 | 7,63 | 8,91 | 10,12 | 11,65 | 27,20 | 30,14 | 32,85 | 36,19 | 43,82 |
| 20 | 8,26 | 9,59 | 10,85 | 12,44 | 28,41 | 31,41 | 34,17 | 37,57 | 45,32 |
| 21 | 8,90 | 10,28 | 11,59 | 13,24 | 29,61 | 32,67 | 35,48 | 38,93 | 46,80 |
| 22 | 9,54 | 10,98 | 12,34 | 14,04 | 30,81 | 33,92 | 36,78 | 40,29 | 48,27 |
| 23 | 10,20 | 11,69 | 13,09 | 14,85 | 32,01 | 35,17 | 38,08 | 41,64 | 49,73 |
| 24 | 10,86 | 12,40 | 13,85 | 15,66 | 33,20 | 36,41 | 39,37 | 42,98 | 51,18 |
| 25 | 11,52 | 13,12 | 14,61 | 16,47 | 34,38 | 37,65 | 40,65 | 44,31 | 52,62 |
| 26 | 12,20 | 13,84 | 15,38 | 17,29 | 35,56 | 38,88 | 41,92 | 45,64 | 54,05 |
| 27 | 12,88 | 14,57 | 16,15 | 18,11 | 36,74 | 40,11 | 43,19 | 46,96 | 55,48 |
| 28 | 13,57 | 15,31 | 16,93 | 18,94 | 37,92 | 41,34 | 44,46 | 48,28 | 56,89 |
| 29 | 14,26 | 16,05 | 17,71 | 19,77 | 39,09 | 42,56 | 45,72 | 49,59 | 58,30 |
| 30 | 14,95 | 16,79 | 18,49 | 20,60 | 40,26 | 43,77 | 46,98 | 50,89 | 59,70 |

Quand $\nu$ est supérieur à 30, on utilise la table de la loi normale (table de l'écart réduit) avec :

$$t = \sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2\nu - 1}$$