Variables aléatoires discrètes

Exemple : Une urne contient 1 boule blanche, 3 boules rouges et 6 boules noires.
On gagne 100 quand on tire une boule blanche
20 quand on tire une boule rouge et
0 quand on tire une boule noire.
Le gain est une variable aléatoire.

Définition : Soit Ω un ensemble d'évènements élémentaires sur lequel on a défini une probabilité. Faisons correspondre un nombre à chaque évènement élémentaire.
On définit ainsi une variable aléatoire discrète X.

Exemple :
X=Gain : {rouge, blanche, noire} $\rightarrow$ I**R**
rouge $\rightarrow$ 20
blanche $\rightarrow$ 100
noire $\rightarrow$ 0

Loi de probabilité d'une variable discrète

Exemple : X, la variable aléatoire gain, peut prendre les valeurs 0, 20 et 100 avec les probabilités suivantes :

P(X=0) = P(noire) = 0,6
P(X=20) = 0,3
P(X=100) = 0,1

Définition
L'association des valeurs x de la variable X et des probabilités P(X=x) est la loi de probabilité de X.

Exemple : loi de probabilité du Gain X

x	0	20	100
P(X=x)	0,6	0,3	0,1

Espérance mathématique :

$$E(X) = \sum_{x} xP(X = x)$$

Exemple : calculer le gain moyen. On l'appellera E(X) :

x	0	20	100
P(X=x)	0,6	0,3	0,1

Propriétés :
Soient a et b des constantes réelles, X et Y deux variables aléatoires :

- E(a X)=a E(X)
- E(b) = b
- E(X+Y) = E(X) + E(Y)

Exemples : (rappel E(X) = 16)

- E(2X+3) =
- Si Y telle que E(Y) = 8 alors E(X+Y) =

Variance et écart type :
Définition

$$V(X) = \sum_{x} (x - E(X))^2 P(X = x)$$

L'écart type σ est la racine carrée de la variance

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Propriété (à utiliser pour les calculs !)

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 \text{ ou } E(X^2) = \sum_{x} x^2 P(X = x)$$

Exemple : Calculer V(X) dans le cas de la variable aléatoire gain.

Propriétés :

- $V(a X) = a^2 V(X)$
- $V(X + b) = V(X)$
- $V(b) = 0$ la variance d'une variable constante est toujours nulle
- $V(X) \geq 0$
- $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ dans le cas où les variables X et Y sont indépendantes

(Ce n'est pas toujours le cas !)

Exemples :

- $V(3X+2) =$
- $\sigma(2X+3) =$
- Si Y est telle que $E(Y)=20$ et $\sigma(Y)=10$ et X et Y sont indépendantes,

Calculer $\sigma(X+Y)$

Exercices sur les variables aléatoires :

Ex1 : a) Complétez les tableaux des lois de probabilité des variables suivantes :

x	-1	0	1
P(X=x)	0,2	0,5	

x	-1	0	1
P(Y = x)	0,25	0,5	

b) Calculez E(X) et E(Y)

c) Calculez V(X) et V(Y)

Ex2 : Dans un magasin, on organise un jeu : chaque client lance un dé à 6 faces une seule fois et obtient alors une remise. S'il obtient 1, il obtient 10% de remise sur ses achats, s'il obtient 2,3,4 ou 5, il obtient 5% de remise, et s'il obtient 6 il obtient 20%.

a) Quelle est la loi de probabilité de la remise accordée ?
   Soit X la remise accordée en %.

x	5	10	20
P(X=x)	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

b) Quelle est la remise moyenne accordée au client ?
c) Proposer un jeu similaire tel que la remise pour un 6 soit de 50% mais que la remise moyenne soit de 10%

Ex3 : Quelles sont les variables aléatoires de variance nulle ?

Ex 4 : On lance deux dés à 6 faces, on note leur somme.
On attribue un gain suivant la valeur obtenue avec la formule suivante

Gain= 2 fois la somme -10.
a) Quelle est la loi de probabilité du gain ?
b) Quel est le gain moyen ?
c) Proposer un autre gain donnant un jeu équilibré.

Ex 5 : Introduction à la notion de fonction de répartition

Exemple Cours: On va dessiner la fonction de répartition $F_X(t) = P(X \leq t)$

De la variable aléatoire X de loi suivante :

x	0	20	100
P(X=x)	0,6	0,3	0,1

Ex 6: Dessiner le graphe de la fonction de répartition des variables aléatoires suivantes :
Y :

x	-4	2
P(Y=x)	0,3	0,7

Ex 7: Une entreprise fabrique des cartes graphiques pour ordinateurs.
Deux ateliers de fabrication se répartissent la production de la journée.
L'atelier A est plus moderne et produit 60% des cartes et l'atelier B en produit 40%.
Un contrôle de qualité a permis de constater que 2% des cartes de l'atelier A et 1% des cartes de l'atelier B présentent un défaut.
Chaque carte a un coût de production de 10 euros dans l'atelier A et de 15 euros dans l'atelier B.
Les cartes défectueuses sont détruites après contrôle et le coût de recyclage de chaque carte est de 5 euros.
Les autres cartes (celles qui ne sont pas défectueuses) sont vendues 50 euros.

Déterminer le bénéfice que peut espérer en moyenne l'entreprise sur chaque carte fabriquée.

Ex 8 :

Soit une variable aléatoire T telle que

- T a pour valeurs possibles : 1, 2, 3, 4
- $P(T = 2) = 2\,P(T = 1)$
- $P(T = 3) = 2\,P(T = 2)$
- $P(T = 4) = 2\,P(T = 3)$

Déterminer la loi de T et en déduire sa fonction de répartition.