

Probabilités

Expérience aléatoire - Evénements

Expérience aléatoire

C'est une expérience qui, répétée dans des conditions apparemment identiques, peut conduire à des résultats différents.

L'univers Ω

L'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire s'appelle l'univers associé à cette expérience aléatoire, et se note Ω .

Les événements élémentaires

Définition : Les événements élémentaires (ou éventualités) sont tous les résultats d'une épreuve, possibles et exclusifs l'un de l'autre.

Exemple : Considérons l'épreuve suivante : lancer d'une pièce de monnaie

Événements élémentaires : Pile, Face

Les événements

Définition :

Soit Ω l'ensemble des événements élémentaires relatifs à une épreuve. Un événement est un sous ensemble de Ω .

Exemple :

Epreuve : lancer d'une pièce de monnaie

$\Omega = \{\text{Pile ; Face}\}$

Événements incompatibles

A et B sont deux événements incompatibles si $A \cap B = \emptyset$

Exemple : $\text{Pile} \cap \text{Face} = \emptyset$

Les Axiomes

Soit Ω un ensemble fini d'événements pouvant résulter d'une épreuve.

Pour tout événement A , il existe un nombre positif ou nul $P(A)$ appelé probabilité de A .

La probabilité de l'ensemble Ω de tous les événements possibles associés à l'épreuve est égale à 1.

- $P(\Omega)=1$
- Si A et B sont deux événements incompatibles, alors

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Quelques exemples

Événement impossible

La probabilité d'un événement impossible est égale à 0. $P(\emptyset)=0$

Exemple : $P(\text{Pile} \cap \text{Face}) = 0$

Événement certain

La probabilité d'un événement certain est égale à 1.

Exemple : $P(\text{Pile} \cup \text{Face}) = 1$

Événement contraire

L'événement contraire à l'événement A est noté \bar{A}

On a: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Par exemple : $P(\text{Pile})=1-P(\text{Face})$

Réunion d'événements équiprobables

Soit n le nombre des événements élémentaires équiprobables, susceptibles de résulter d'une épreuve. Soit k le nombre de ces événements élémentaires dont la réunion constitue un événement A .

La probabilité de l'événement A est $P(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$

Exemple : lancer d'un dé à 6 faces

Soit A l'événement : "obtenir un résultat pair"

Théorème $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Exemple :

On tire 1 carte dans un jeu de 32 cartes.

Quelle est la probabilité de tirer un roi ou un cœur ?

Probabilité conditionnelle

Définition

Soit un ensemble Ω d'événements sur lequel on a défini une probabilité.

Soit A un événement de probabilité non nulle.

On appelle probabilité de B sachant A (ou probabilité conditionnelle de B liée à A , ou probabilité conditionnelle de B si A) le rapport :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Exemple :

Une entreprise emploie 100 salariés dont 90 ouvriers (20 hommes et 70 femmes) et 10 cadres (7 hommes et 3 femmes). Un salarié est tiré au sort. Le résultat du tirage est une femme.

Quelle est la probabilité pour que ce salarié soit un cadre ?

Propriétés

$$P(A \cap B) = P_A(B)P(A)$$

$$P(A \cap B) = P_B(A)P(B)$$

Evénements indépendants

Définition : A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Remarque: Si $P(A) > 0$ Ceci se traduit par $P_A(B) = P(B)$

Exemple :

La population de France, en 2000, classée par régions, et en fonction de son attitude face à la légalisation de Cannabis, se présentait schématiquement de la manière suivante :

	Pour	Contre
Bretagne (B)	7,8 %	22,2 %
Ensemble des régions sauf Bretagne	18,2 %	51,8 %

1. Quelle est la probabilité pour qu'un individu choisi au hasard soit pour la légalisation ?
2. Quelle est $P_B(Pour)$?
3. Pour est-il indépendant de B ?

Formule de Bayes

$$P_A(B) = \frac{P_B(A)P(B)}{P_B(A)P(B) + P_{\bar{B}}(A)P(\bar{B})}$$

Exemple : Deux entreprises se partagent le marché des smartphones : L'américaine produit 30% dont 1 % présente des défauts, la coréenne 70% dont 3 % présente des défauts. On achète un smartphone qui se trouve être défectueux.

Faites un arbre de proba conditionnelle !

Quelle est la probabilité qu'il vienne de la marque coréenne ?